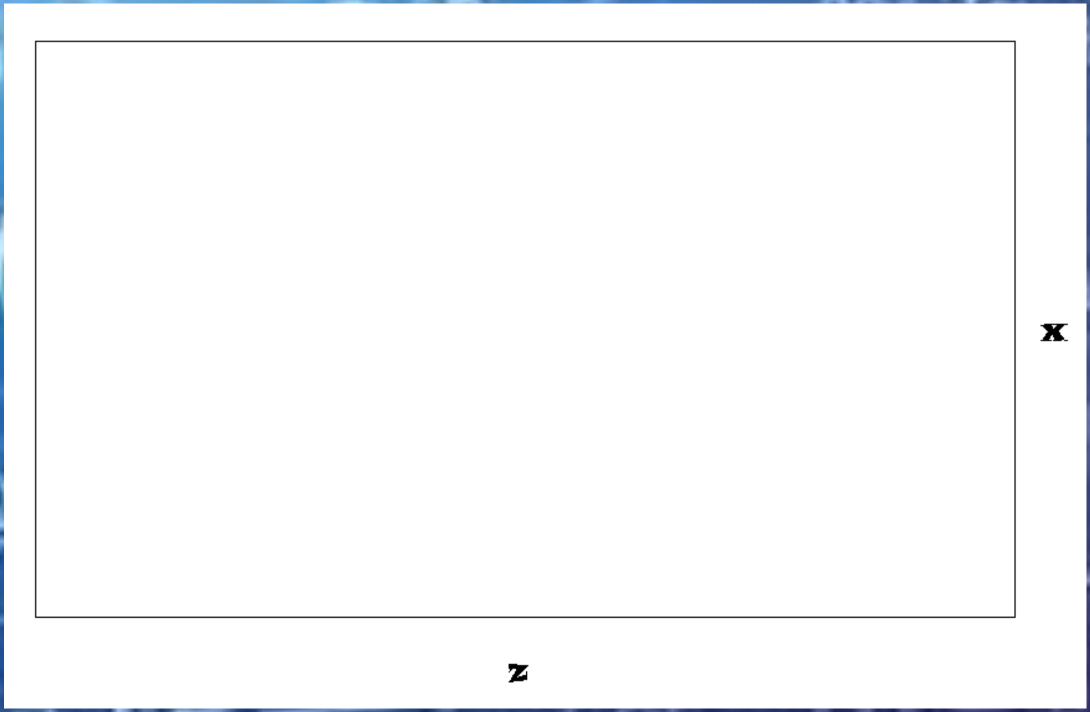
PROGETTO DI MATEMATICA

PROBLEMA:

Si vogliono allevare 40 buoi. Pensando che ogni bue avrà bisogno di circa 50 m² per vivere bene, calcolare la minima lunghezza del recinto di cui si necessita per cingere tutto l'allevamento.

Per cominciare, si disegna un rettangolo generico, che rappresenta il recinto, con un lato “x” e l’altro “z”.



L’area che dovrà avere questo rettangolo si ricava moltiplicando la superficie di cui necessita ogni bue, cioè 50 m^2, per il numero dei buoi, 40, ottenendo come risultato 2000 m^2.

L’area di un rettangolo è uguale alla moltiplicazione della base per l’altezza. In questo caso, si avrà quindi:

$$A = x \times z$$

Il perimetro, invece, è il doppio della somma della base con l’altezza, quindi:

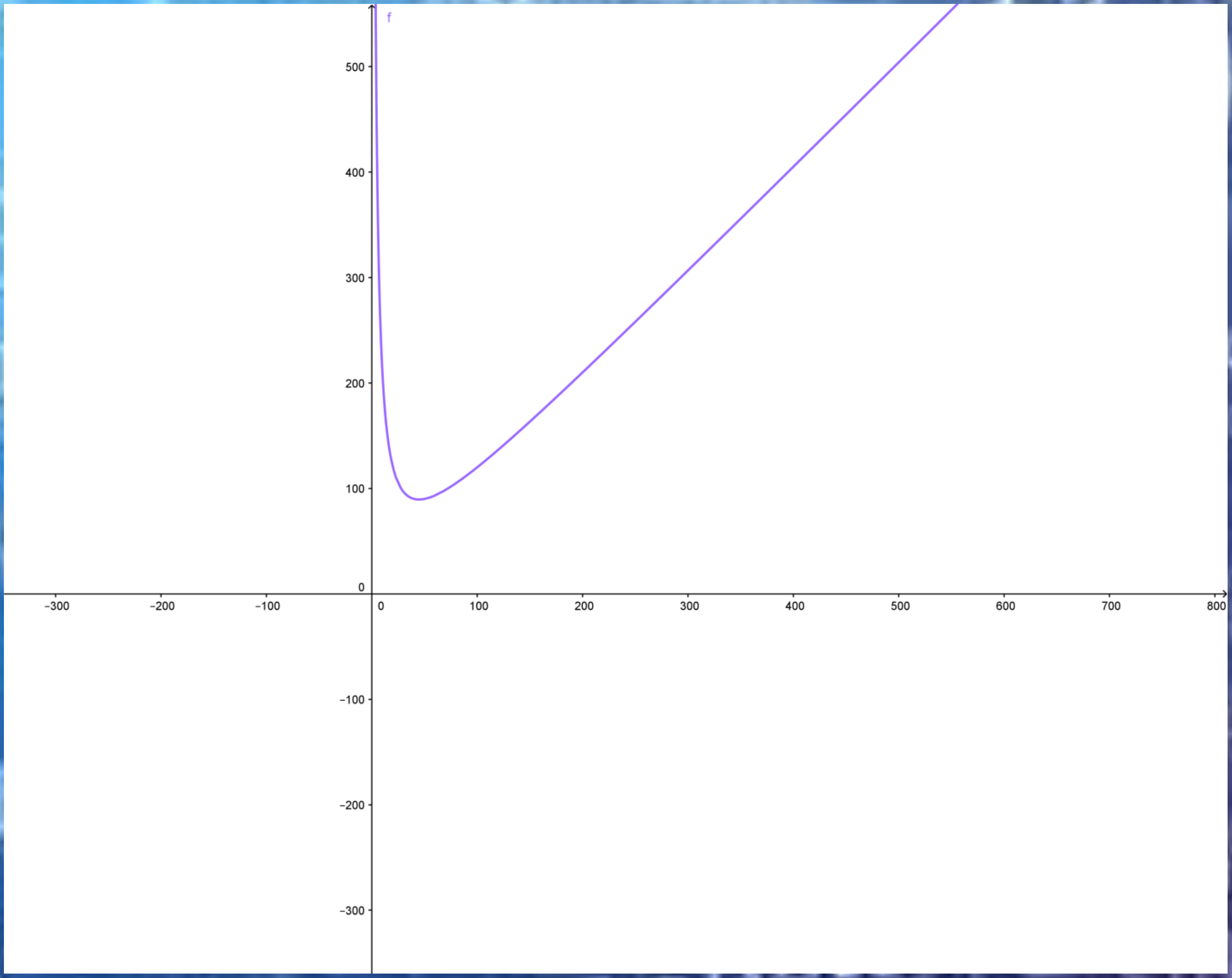
$$2p = 2(x + z)$$

Mettendo a sistema queste due formule, e chiamando il semiperimetro p “y”, arriviamo all’equazione $y = \frac{x^2 + A}{x}$

E quindi: $$y = x + \frac{2000}{x}$$

Ovviamente bisogna porre $x > 0$ e $y > 0$, poiché si trattano relativamente di un lato e del semiperimetro, che non possono essere misure negative; inoltre, x, trovandosi anche al denominatore, non può essere uguale a 0.

Questa equazione, ha il seguente grafico:



Come si nota dal grafico, la funzione ottenuta è un'iperbole.

Per trovare le equazioni degli asintoti di questa iperbole, si dovrà analizzare il limite della funzione per x che tende a infinito e per x che tende a zero.

Dato che se $x \to \infty$, allora $\dfrac{2000}{x} = \dfrac{2000}{\infty} = 0$,

$$\lim_{x \to \infty} y = \infty + 0 = \infty$$

Quindi, se $x \to \infty$, accade anche che x ed y tendono ad assumere gli stessi valori numerici, quindi x $\longrightarrow$ y , cioè y=f(x) si avvicina alla retta y=x. .

Di conseguenza, il primo asintoto è: $\boxed{y = x}$

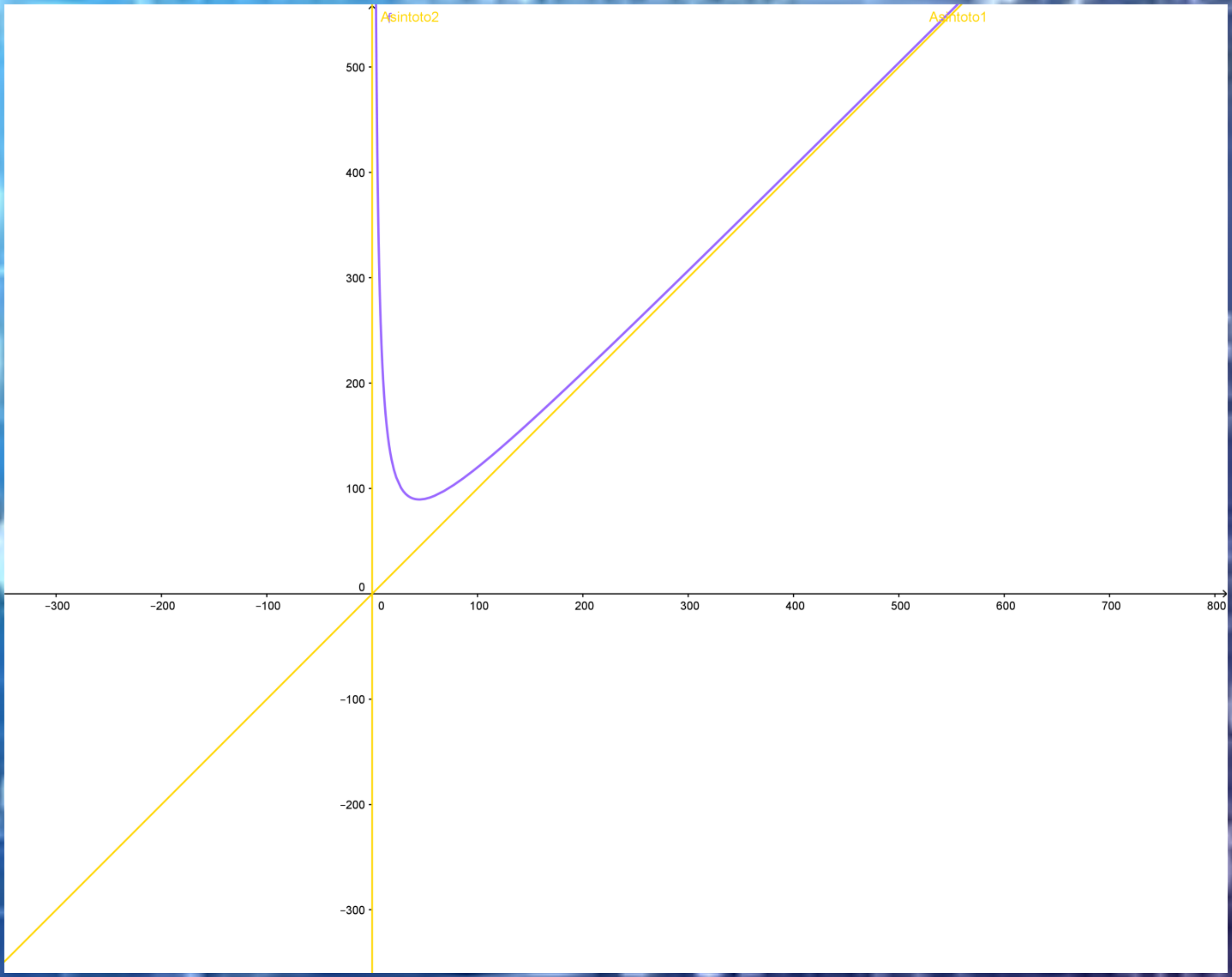
Dal grafico, si evince inoltre che per $x \to 0$, $y \to \infty$;

infatti, se $x \to 0$, l'espressione $\frac{2000}{x}$ tende a +∞.

Quindi: $\lim_{x \to 0} y = 0 + \infty = \infty$

Infine, poiché a $x = 0$ corrisponde $y = \infty$, il secondo asintoto è: $\boxed{x = 0}$

Rappresentiamo sul grafico anche i due asintoti:



Per trovare il perimetro minimo, calcoliamo il valore più basso che può assumere y (cioè il semiperimetro) nella funzione.

Per fare ciò, troviamo il punto di intersezione dell'iperbole con una retta tangente parallela all'asse x, ossia il punto più vicino all'asse delle ascisse, che avrà l'ordinata minore possibile.

Una retta parallela all’asse x ha equazione $y = k$.

Mettendo a sistema l’equazione generica di una retta parallela all’asse x con l’equazione della funzione, abbiamo:

$$\begin{cases} y = x + \dfrac{2000}{x} \\ x > 0 \\ y = k \end{cases}$$

Risolvendo il sistema, otteniamo:

$$\boxed{x^2 - kx + 2000 = 0}$$

In quest'equazione di 2° grado, Δ deve essere obbligatoriamente posto uguale a zero (come condizione per la tangenza della retta); quindi abbiamo, poiché $\Delta = b^2 - 4ac$:

$$k^2 - 4 \times 2000 = 0$$

E quindi: $\boxed{k = \pm 40\sqrt{5}}$

Abbiamo quindi due valori di k, corrispondenti a due valori di x, che ricaviamo sostituendo k nell'equazione risultante del sistema.
Di conseguenza:

Per

$k = -40\sqrt{5} \to x^2 + 40\sqrt{5}x + 2000 = 0$,

che ha come unica soluzione $x = -20\sqrt{5}$,

che non rispetta la condizione posta all'inizio $x > 0$, quindi <u>non è accettabile</u>.

Per

$k = 40\sqrt{5} \to x^2 - 40\sqrt{5} + 2000 = 0$,

che ha come unica soluzione $\boxed{x = 20\sqrt{5}}$,

che rispetta la condizione posta all’inizio $x > 0$, quindi è accettabile.

Di conseguenza, l’unica soluzione di k accettabile è:

$$k = 40\sqrt{5}$$

E quindi, la retta orizzontale tangente all’iperbole è:

$$y = 40\sqrt{5}$$

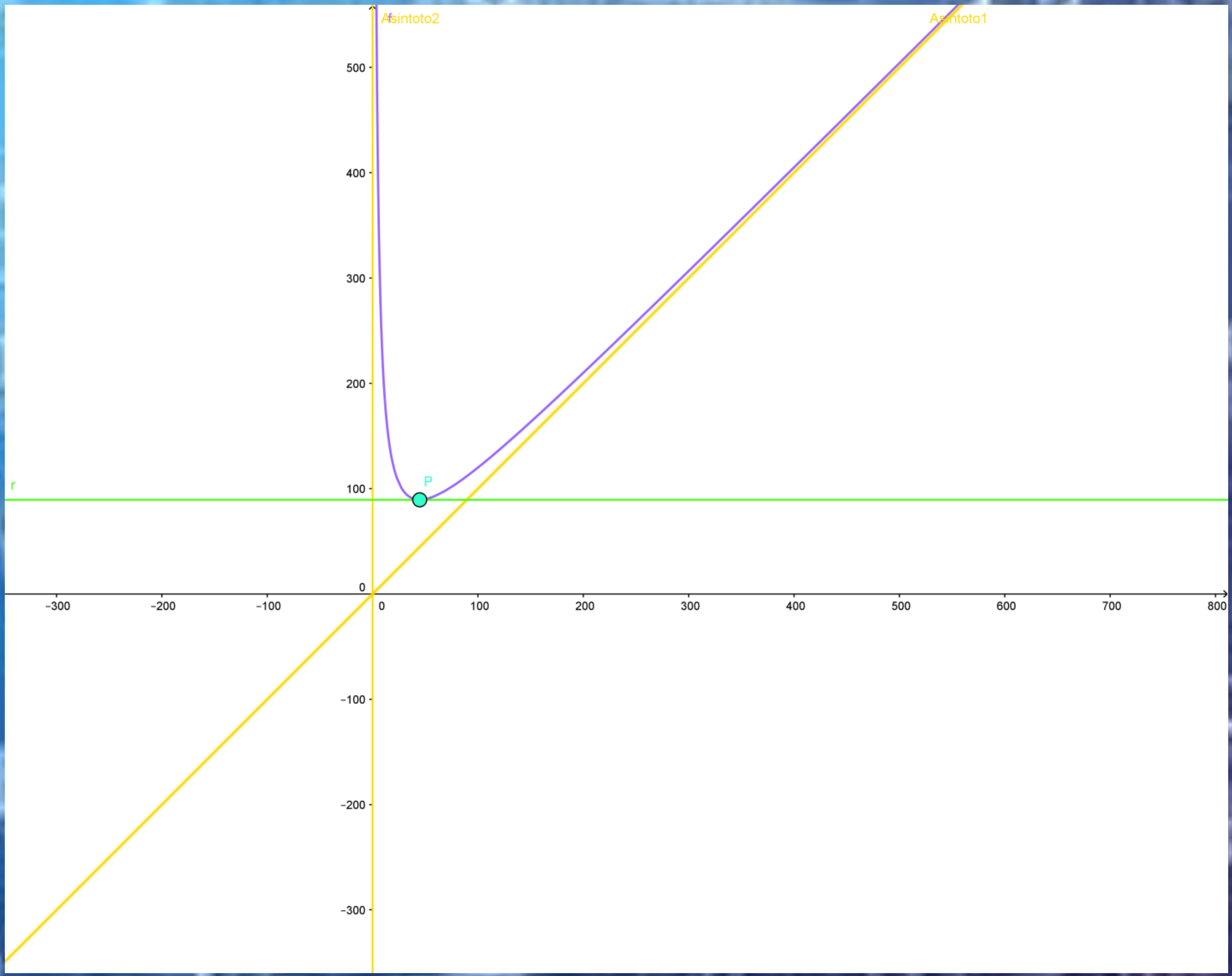
Il punto di tangenza sarà dunque:

$$P(20\sqrt{5}; 40\sqrt{5})$$

Infine, poiché, come detto all'inizio, in questo grafico la "y" corrisponde al semiperimetro del rettangolo, il perimetro minimo che il recinto può avere, con un'area di 2000 m², è:

$$2p = 40\sqrt{5}$$

Il grafico finale è quindi:



SALVATORE CIPRIANO
NICOLÒ MOSCHEN
ANDREA SCIAMANNA

III A a.s. 2015-’16